CPI2 : ALGÈBRE 3, 2016-2017.
TD1

Pr. H. EL AMRI

**Exercice 0.0.1.** *Les ensembles suivants sont ils des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^2$?

1. $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$
2. $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$
3. $F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 = 0\}$

## SOLUTION

1. $F_1$ est un sous espace vectoriel d $\mathbb{R}^2$ puisqu'il vérifie la condition suivante : Soient $(x,y),(z,t) \in F_1$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors $x = y$ et $z = t$. $\alpha(x,y) + \beta(z,t) = (\alpha x + \beta z, \alpha y + \beta t)$ On a $\alpha x + \beta z = \alpha y + \beta t$ donc $\alpha(x,y) + \beta(z,t) \in F_1$.
2. $F_2$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$ car il ne contient pas l'élément neutre $O = (0,0)$.
3. $F_2$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$ car $(1,1) \in F_3$ et $(1,-1) \in F_3$ mais leur somme $(2,0) \notin F_3$

**Exercice 0.0.2.** *Soient* $F = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ *et* $G = \{(a-b, a+b, a-3b), a,b \in \mathbb{R}\}$

1. *Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.*
2. *Déterminer $F \cap G$.*
3. *Montrer que le système $(v_1,v_2)$ où $v_1 = (1,1,2)$ et $v_2 = (1,2,3)$ est une base de $F$.*
4. *Montrer que le système $(w_1,w_2)$ où $w_1 = (1,1,1)$ et $w_2 = (-1,1,-3)$ est une base de $G$.*

## SOLUTION

1. Soients $x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2,y_3) \in F$, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors
   $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$
   et on a
   $$\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 - (\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(x_1 + x_2 - x_3) + \beta(y_1 + y_2 - y_3) = 0$$
2. De même pour le sous espace $G$ : Si $x, y \in G$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors
   $$x = (a-b, a+b, a-3b) \quad et \quad y = (c-d, c+d, c-3d) \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$
   On vérifie facilement que $\alpha x + \beta y$ s'écrit lui aussi sous la forme $(A-B, A+B, A-3B)$.
3. Soit $x \in F \cap G$, alors
   $x \in G \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$ tel que $x = (a-b, a+b, a-3b)$
   $x \in F \Rightarrow (a-b) + (a+b) - (a-3b) = 0$
   C'est à dire $a + 3b = 0$ ou encore $a = -3b$, d'où :
   $$F \cap G = \{x = (-3b-b, -3b+b, -3b-3b), b \in \mathbb{R}\} = x = -b(4,2,6), b \in \mathbb{R}$$
   $$G = \{x = \lambda(2,1,3), \lambda \in \mathbb{R}\}$$
4. $(v_1,v_2)$ où $v_1 = (1,1,2)$ et $v_2 = (1,2,3)$ est une base de $F$ : Système libre et générateur.
5. $(w_1,w_2)$ où $w_1 = (1,1,1)$ et $w_2 = (-1,1,-3)$ est une base de $G$ : Système libre et générateur.

**Exercice 0.0.3.** *Soit $E$ l'espace de toutes les suites réelles.*

1. *Montrer que $E$ muni de l'addition des suites et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel.*
2. *Les parties suivantes sont elles des sous-espaces vectoriels.*
   (a) $F_1 = \{(u_n)_n \in E \text{ bornée } \}$
   (b) $F_2 = \{(u_n)_n \in E \quad \text{convergente } \}$
   (c) $F_3 = \{(u_n)_n \in E \quad \text{monotone } \}$
   (d) $F_4 = \{(u_n)_n \in E \quad \text{arithmétique } \}$
   (e) $F_5 = \{(u_n)_n \in E \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$

**SOLUTION**

1. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in F_1$, alors il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$|u_n| \leq C_1 \quad et \quad |v_n| \leq C_2$$

   Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors la suite $(\alpha u_n + \beta u_n)_n$ est bornée, en effet :

$$|\alpha u_n + \beta u_n| \leq |\alpha u_n| + |\beta u_n| \leq |\alpha| C_1 + |\beta| C_2 = C_3$$

2. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in F_2$,

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - l_1| = 0 \quad et \quad \lim_{n \to +\infty} |v_n - l_2| = 0$$

   Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors la suite $(\alpha u_n + \beta u_n)_n$ converge vers $\alpha l_1 + \beta l_2$.
   En effet

$$|\alpha u_n + \beta u_n) - (\alpha l_1 + \beta l_2)| = |\alpha(u_n - l_1) + \beta(v_n - l_2)|$$

$$\leq |\alpha(u_n - l_1)| + |\beta(v_n - l_2)| = |\alpha||u_n - l_1| + |\beta||v_n - l_2| \to 0$$

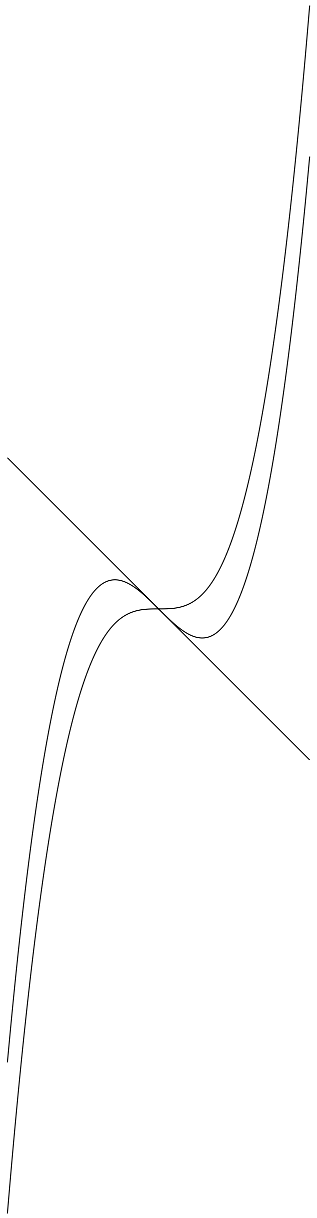
   Conclusion : $F_2$ est un sous espace vectoriel de $E$.
3. $F_3$ n'est pas un sous espace vectoriel de $E$. La somme de deux suites monotones n'est pas toujours monotones. Je vous laisse trouver des exemples. On cherche deux suites telles que l'une est croissante et l'autre est décroissante et pour lesquelles la somme n'est ni croissante ni décroissante.
4. $F_4$ oui (évident)
5. $F_5$ oui (évident)

**Exercice 0.0.4.** *Soit $E$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un scalaire. Les sous ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?*

1. $F_1 = \{f \in E \text{ monotone } \}$
2. $F_2 = \{f \in E, \quad f \text{ s'annule } \}$
3. $F_3 = \{f \in E, \quad f \text{ s'annule en 0 } \}$
4. $F_5 = \{f \in E, \quad f \text{ impaire } \}$

**SOLUTION**

1. $f(x) = -x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ mais la somme $(f+g)(x) = -x + x^3 = x(1-x)(1+x)$ change de signe $-1$, en 0 et en 1. Elle n'est donc pas monotone.



2. $F_2$ n'est pas un sous espace vectoriel de $E$.
   $f(x) = x^2$ s'annule, donc $f \in F_2$ (elle s'annule en 0).
   $g(x) = 2x + 2$ s'annule, $g \in F_2$ (elle s'annule en $-1$).
   Mais $(f+g)(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$ ne s'annule jamais. Donc $f + g \notin F_2$.
3. $F_3$ est un sous espace vectoriel de $E$. Si deux fonctions $f$ et $g$ s'annulent en 0 alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) = 0$.
4. $F_5$ est un sous espace vectoriel de $E$. En effet, Soient $f, g \in F_5, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
   $(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = -\alpha f(x) - \beta g(x) = -(\alpha f(x) + \beta g(x)) = -(\alpha f + \beta g)(x)$.

**Exercice 0.0.5.** *Dans $\mathbb{R}^3$ on considère l'ensemble*

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \quad tels \quad que \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

1. *Montrer que $E$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$*
2. *Donner une base de $E$.*

**SOLUTION**

1. $E$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (évident).
2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$ alors $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, c'est à dire $x_3 = -x_1 - x_2$. Donc

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_1 - x_2) = (x_1, 0, -x_1) + (0, x_2, -x_2) = x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, -1)$$

   On a donc

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 \ \ avec \ \ v_1 = (1, 0, -1) \ \ et \ \ v_2 = (0, 1, -1)$$

   Il vous suffit de montrer que le système $(v_1, v_2)$ est un système libre.

**Exercice 0.0.6.** *Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble*

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ \ tels \ \ que \ \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

1. *Montrer que $E$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$*
2. *Donner une base de $E$.*

**SOLUTION**

1. Comme l'exercice précédent.
2. Comme l'exercice précédent.

**Exercice 0.0.7.** *Soient $t \in \mathbb{R}$ et $v_1 = (1, 0, t)$, $v_2 = (1, 1, t)$, $v_3 = (t, 0, 1)$. Pour quelles valeurs de $t$ le système $(v_1, v_2, v_3)$ est-il une base de $\mathbb{R}^3$*

**SOLUTION**

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Alors $(\lambda_1 + \lambda_2 + t\lambda_3, \lambda_2, t\lambda_1 + t\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$.
Ceci donne

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + t\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ t\lambda_1 + t\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda_1 + t\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ t\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \lambda_1 = -t\lambda_3 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -t\lambda_1 \end{cases} \tag{3}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = t^2\lambda_1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -t\lambda_1 \end{cases} \tag{4}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1(1 - t^2) = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -t\lambda_1 \end{cases} \tag{5}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1(1 - t)(1 + t) = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -t\lambda_1 \end{cases} \tag{6}$$

**Pour pouvoir dire que $\lambda_1 = 0$ il faut et il suffit que $(1 - t)(1 + t)$ ne soit pas nul.**
**On aura alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.**
**Le système est alors libre si et seulement si $t \neq -1$ et $t \neq 1$**

**Exercice 0.0.8.** *Soient $F$ et $G$ deux sous espaces vectoriels d'un même espace vectoriel $E$. On définit la somme de $F$ et $G$ par*

$$F + G = \{x + y, x \in F, y \in G\}$$

1. *Monter que $F + G$ est un sous espace vectoriel de $E$.*
2. *Montrer que $dim(F + G) = dimF + dimG - dim(F \cap G)$*

**Exercice 0.0.9.** *On considère dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs suivants : $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (1, 1, 1, 3)$, $v_3 = (2, 1, 1, 1)$, $v_4 = (-1, 0, -1, 2)$, $v_5 = (2, 3, 0, 1)$. Soient :*
*$F$ le sous-espace vectoriel engendré par $(v_1, v_2, v_3)$*
*$G$ le sous-espace engendré par $(v_4, v_5)$*
*Calculer $dimF$, $dimG$, $dim(F \cap G)$, $dim(F + G)$.*

## SOLUTION

1. On doit vérifier si le système $(v_1, v_2, v_3)$ est libre. Supposons donc $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

   Ce système admet pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Et le système est donc libre. Comme il est générateur de $F$ par construction alors c'est une base de $F$ est donc

$$dimF = 3.$$

2. Il est clair que les deux vecteurs $v_4 = (-1, 0, -1, 2)$ et $v_5 = (2, 3, 0, 1)$ no sont pas dépendants. On ne peut pas écrire $v_5 = \alpha v_4$ ou l'inverse. Le système $(v_4, v_5)$ est donc un système libre.

$$dimG = 2.$$

3. On cherche $F \cap G$. Soit $x \in F \cap G$ alors :
   D'une part

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

   et

$$x = \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5$$

   d'autre part. On identifiant on obtient un système de 4 équations à 5 inconnues :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = -\lambda_4 + 2\lambda_5 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3\lambda_5 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\lambda_4 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 2\lambda_4 + \lambda_5 \end{cases} \tag{8}$$

   Qu'on écrit sous la forme

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_5 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3\lambda_5 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 - \lambda_5 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

   Un calcul d'élimination nous amène à écrire $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ en fonction de $\lambda_5$ sous la forme

$$\lambda_i = c_i \lambda_5, i = 1, ...4$$

Alors $F \cap G$ sera le sous espace vectoriel engendré par le vecteur $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ et aussi par $c_4v_4 + v_5$
**Conclusion : Le sous espace $F \cap G$ est de dimension** $1$. Et comme

$$dim(F + G) = dimF + dimG - dim(F \cap G)$$

alors

$$dim(F + G) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

C'est à dire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

**Exercice 0.0.10.** *Vérifier si les parties de $\mathbb{R}$ $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ suivantes sont des sous-espaces vectoriels.*

1. $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \quad monotone \ \}$
2. $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \quad s'annule \quad en \quad 0 \ \}$
3. $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \quad s'annule \ \}$
4. $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \quad est \quad impaire \ \}$